Całka potrójna – określenie oraz metody obliczania

Określenie oraz własności całki potrójnej

Całkę potrójną w obszarze przestrzennym V zdefiniujemy analogicznie, jak całkę podwójną w obszarze płaskim D.
Niech dana będzie funkcja trzech zmiennych $f(x,y,z)$, która jest określona i ograniczona w pewnym domkniętym obszarze przestrzennym (bryle) V. Dokonajmy podziału P_n obszaru V na n podobszarów domkniętych V_k o objętościach ΔV_k ($k=1,2,...,n$), które całkowicie go wypełniają i maja parami rozłączne wnętrza.
Oznaczmy:
d_k – średnica podobszaru V_k, tj. długość najdłuższego odcinka o końcach należących do V_k,
$\delta_n = \max\limits_{1 \le k \le n} d_k$ – *średnica podziału* P_n.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, to ciąg podziałów $\{P_n\}$ obszaru V nazywamy *normalnym*.

W każdym podobszarze V_k obieramy dowolnie punkt $A_k(x_k, y_k, z_k)$, obliczamy $f(x_k, y_k, z_k)$, a następnie tworzymy tzw. *sumę całkową*:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k .$$

Definicja 1. Jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziałów obszaru V każdy ciąg sum całkowych $\{\sigma_n\}$ dąży do tej samej granicy skończonej i granica ta nie zależy od wyboru punktów A_k ($k=1,2,...,n$), to granicę tę nazywamy *całką potrójną* funkcji $f(x,y,z)$ w obszarze V i oznaczamy symbolem

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV \quad \text{lub} \quad \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz .$$

Możemy zatem zapisać:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \lim_{\delta_n\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k .$$

O funkcji $f(x,y,z)$ mówimy wówczas, że jest *całkowalna* w rozważanym obszarze.

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcje $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ są całkowalne w obszarze domkniętym V, to:

1° $\iiint\limits_V A f(x,y,z)dxdydz = A\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, A – stała,

2° $\iiint\limits_V [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]dxdydz =$

$$= \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \pm \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz .$$

Twierdzenie 2 (o addytywności całki potrójnej względem obszaru całkowania). Jeżeli funkcja $f(x,y,z)$ jest całkowalna w przestrzennym obszarze domkniętym V, gdzie V jest sumą dwóch obszarów domkniętych V_1 i V_2 o rozłącznych wnętrzach ($V = V_1 \cup V_2$), to:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz .$$

Całka potrójna w obszarze normalnym

Definicja 2. Przestrzenny obszar domknięty V nazywamy *obszarem normalnym względem płaszczyzny* Oxy (rys. 2.1), jeżeli można zapisać go w postaci:

$$V = \{(x,y,z): (x,y) \in D,\ p(x,y) \le z \le q(x,y)\},$$

gdzie funkcje p i q są ciągłe na obszarze płaskim D oraz $p(x,y) < q(x,y)$ dla punktów (x,y) należących do wnętrza obszaru D.

Twierdzenie 3. Jeżeli funkcja $f(x,y,z)$ jest ciągła w obszarze V, który jest normalny względem płaszczyzny Oxy, to:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy . \qquad (1)$$

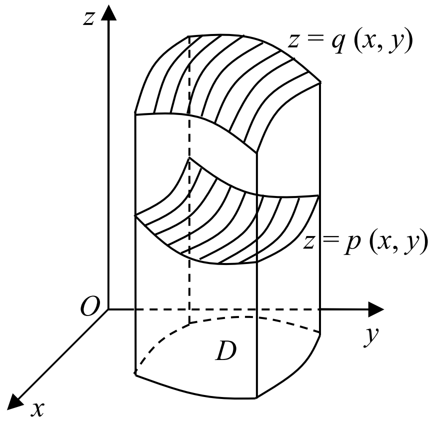
Z powyższego twierdzenia wynika, że obliczenie całki potrójnej sprowadza się do obliczenia dwóch całek: całki pojedynczej i całki podwójnej.

Uwaga. Jeżeli obszar płaski D jest normalny względem osi Ox i można zapisać go w postaci:

$$D = \{(x,y): a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\},$$

to stosując wzór na zamianę całki podwójnej na iterowane do prawej strony wzoru (1) otrzymamy:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left\{ \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \left[\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx . \qquad (2)$$



Rys. 1. Obszar normalny względem płaszczyzny Oxy

Na ogół, całki iterowane występujące we wzorze (2) po prawej stronie znaku równości zapisuje się w nieco odmiennej postaci, a mianowicie:

$$\int_a^b \left\{ \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \left[\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dz .$$

Należy jednak pamiętać, że zapis ten nie oznacza mnożenia całek pojedynczych, a kolejność całkowania jest następująca: pierwsze całkowanie odbywa się względem zmiennej z (pozostałe zmienne traktujemy jako stałe), drugie – względem zmiennej y (tutaj zmienną x traktujemy jako stałą), a trzecie (już przy stałych granicach całkowania) przeprowadzane jest względem zmiennej x.

Uwaga. Analogicznie obliczamy całki potrójne po obszarach normalnych względem pozostałych płaszczyzn układu współrzędnych. Dodatkowo, w każdym przypadku obszar D może być normalny względem jednej lub drugiej osi. Łącznie mamy do czynienia z sześcioma odmiennymi sytuacjami. Sformułowanie odpowiednich definicji i twierdzeń pozostawiamy Czytelnikowi.

Definicja 3. Sumę skończonej liczby obszarów normalnych względem płaszczyzn układu współrzędnych o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy *obszarem regularnym* w przestrzeni.

W szczególnym przypadku, gdy obszar V jest prostopadłościanem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, to przy obliczaniu całki potrójnej możemy posłużyć się następującym twierdzeniem:

Twierdzenie 4. (o całce potrójnej po prostopadłościanie)

Jeżeli obszar całkowania V jest prostopadłościanem określonym w następujący sposób:

$$V = \{(x, y, y):\ a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ p \le z \le q\},$$

to wówczas:

1° obojętna jest kolejność całkowania i przykładowo możemy zapisać:

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x, y, z)dz.$$

2° jeżeli funkcja f jest funkcją o rozdzielonych zmiennych i można ją zapisać w postaci $f(x, y, z) = g(x) \cdot h(y) \cdot k(z)$, gdzie funkcje g, h i k są ciągłe odpowiednio na przedziałach $[a, b]$, $[c, d]$ i $[p, q]$, to:

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy \cdot \int_p^q k(z)dz.$$

Przykład 1. Obliczyć całkę potrójną

$$\iiint_V (x + yz)dxdydz,$$

po prostopadłościanie

$$V = \{(x, y, z): -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ -2 \le z \le 1\}.$$

Rozwiązanie. Zastosujemy wzór zawarty w pierwszym punkcie twierdzenia 4, tj. zamieniamy całkę potrójną na całki iterowane:

$$\iiint_V (x + yz)dxdydz = \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 dy \int_{-2}^{1} (x + yz)dz = \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 \left[xz + \frac{1}{2} yz^2 \right]_{-2}^{1} dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 \left[\left(x + \frac{1}{2} y \right) - (-2x + 2y) \right] dy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 \left(3x - \frac{3}{2} y \right) dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[3xy - \frac{3}{4} y^2 \right]_0^1 dx = \int_{-1}^{1} \left(3x - \frac{3}{4} \right) dx = \left[\frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{4} x \right]_{-1}^{1} =$$

$$=\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}.$$

Przykład 2. Obliczyć całki potrójne po obszarach przestrzennych V ograniczonych podanymi powierzchniami:

a) $\iiint\limits_V y\,dxdydz$; V: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x-y+z-2=0$,

b) $\iiint\limits_V (x+z)\,dxdydz$; V: $y=x^2$, $y=1$, $z=0$, $z=3$,

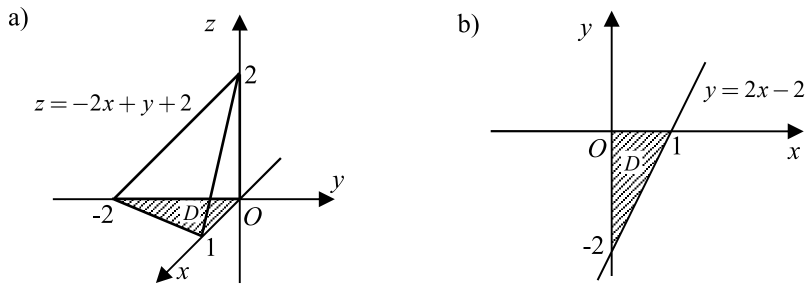
c) $\iiint\limits_V x\,dxdydz$; V: $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=3$, $x=0$, $y=0$, $(x,\, y\geq 0)$.

Rozwiązanie.

a) Sporządzamy najpierw rysunek obszaru całkowania (rys. 2a). Obszar V jest ograniczony płaszczyznami układu współrzędnych oraz płaszczyzną $2x-y+z-2=0$. Aby wyznaczyć punkty przecięcia ostatniej płaszczyzny z osiami układu współrzędnych, zapiszmy jej równanie w postaci odcinkowej:

$$2x-y+z-2=0,\quad 2x-y+z=2\ /:2,\quad \frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=1.$$

Zatem rozważana płaszczyzna przecina osie układu w punktach: $A(1,0,0)$, $B(0,-2,0)$, $C(0,0,2)$.



Rys. 2. Ilustracja do przykładu 2a

Łatwo stwierdzić, że obszar V jest normalny chociażby względem płaszczyzny Oxy. Zauważmy, że współrzędna z dowolnego punktu $P(x,y,z)$ obszaru V zmienia się w granicach:

$$0\leq z\leq -2x+y+2.$$

Aby z kolei określić, w jakich granicach zmieniają się współrzędne x i y punktu P obszaru V, wyznaczamy rzut D tego obszaru na płaszczyznę Oxy (rys. 2b). Równanie prostej $y = 2x - 2$, na której leży dolna krawędź obszaru D można łatwo wyznaczyć (jako część wspólna dwóch płaszczyzn) podstawiając $z = 0$ do równania płaszczyzny $2x - y + z - 2 = 0$. Potraktujmy obszar D, jako normalny względem osi Ox. Można go więc określić nierównościami:

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2x - 2 \le y \le 0 \end{cases}.$$

Ostatecznie obszar V możemy zapisać w postaci:

$$V = \{(x, y, z): 0 \le x \le 1,\ 2x - 2 \le y \le 0,\ 0 \le z \le -2x + y + 2\}.$$

W celu obliczenia danej całki potrójnej korzystamy ze wzoru (2) i zamieniamy ją na całki iterowane:

$$\iiint\limits_V y\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_{2x-2}^{0} dy \int_0^{-2x+y+2} y\,dz = \int_0^1 dx \int_{2x-2}^{0} \left[yz\right]_0^{-2x+y+2} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{2x-2}^{0} \left[y(-2x + y + 2)\right] dy = \int_0^1 dx \int_{2x-2}^{0} (-2xy + y^2 + 2y) dy =$$

$$= \int_0^1 \left[-xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + y^2\right]_{2x-2}^{0} dx =$$

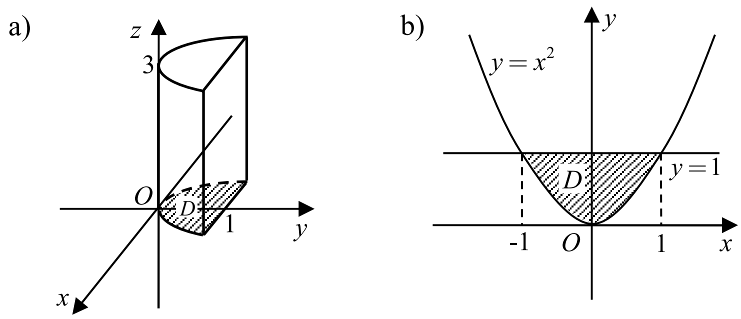
$$= \int_0^1 \left\{0 - \left[-x(2x-2)^2 + \frac{1}{3}(2x-2)^3 + (2x-2)^2\right]\right\} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(4x^3 - 8x^2 + 4x - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2 - 8x + \frac{8}{3} - 4x^2 + 8x - 4\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 4x - \frac{4}{3}\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{4}{3}x\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{4}{3} + 2 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}.$$

b) Obszar V jest tutaj ograniczony walcem parabolicznym o równaniu $y = x^2$ oraz trzema płaszczyznami: $y = 1$, $z = 0$, $z = 3$. Sporządzamy rysunek obszaru V (rys. 3a) oraz jego rzutu D na płaszczyznę Oxy (rys. 3b).



Rys. 3. Ilustracja do przykładu 2b

Traktujemy obszar V, jako normalny względem płaszczyzny *Oxy*, a jego rzut, jako obszar normalny względem osi *Ox*. Patrząc na rysunek 3 zapisujemy:

$$V = \{(x, y, z): -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 3\}.$$

Przechodzimy do obliczenia danej całki potrójnej:

$$\iiint_V (x+z)\,dxdydz = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_{0}^{3} (x+z)\,dz = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} \left[xz + \frac{1}{2} z^2 \right]_0^3 dy =$$

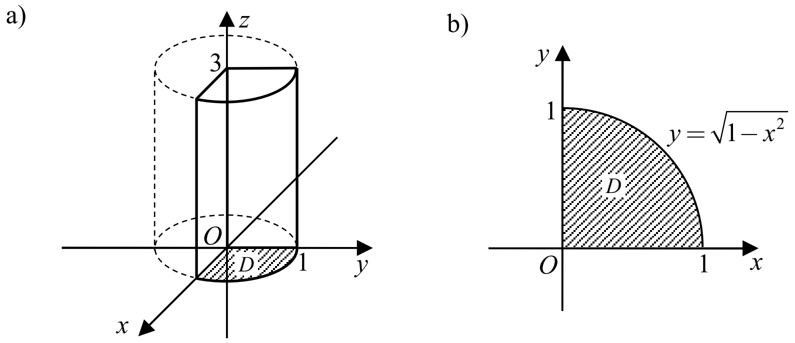
$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} \left(3x + \frac{9}{2} \right) dy = \int_{-1}^{1} \left[3xy + \frac{9}{2} y \right]_{x^2}^{1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(3x + \frac{9}{2} - 3x^3 - \frac{9}{2} x^2 \right) dx = \left[\frac{3}{2} x^2 + \frac{9}{2} x - \frac{3}{4} x^4 - \frac{3}{2} x^3 \right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \right) = 6.$$

c) Na rysunku 4 przedstawiono obszar całkowania V (rys. 4a) i jego rzut D na płaszczyznę *Oxy* (rys. 4b). Obszar V ograniczony jest walcem $x^2 + y^2 = 1$, płaszczyznami układu współrzędnych: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ oraz płaszczyzną $z = 3$. Ponownie obszar V potraktujemy, jako normalny względem płaszczyzny *Oxy*. Współrzędna z dowolnego punktu $P(x, y, z)$ obszaru V spełnia warunek: $0 \le z \le 3$. Aby wyznaczyć granice zmienności współrzędnej x i y zauważmy, że rzut obszaru V na płaszczyznę *Oxy* jest ćwiartką koła ograniczonego okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 = 1$. Zatem górną połowę tego okręgu można opisać równaniem: $y=\sqrt{1-x^2}$, a co za tym idzie współrzędne x i y każdego punktu obszaru D spełniają nierówności:

$$D:\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le \sqrt{1-x^2} \end{cases}.$$



Rys. 4. Ilustracja do przykładu 2c

Ostatecznie obszar V możemy zapisać w postaci:

$$V=\{(x,y,z)\colon 0\le x\le 1,\ 0\le y\le \sqrt{1-x^2}\ ,\ 0\le z\le 3\}.$$

Obliczamy daną całkę:

$$\iiint\limits_V x\,dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_0^3 x\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} [xz]_0^3\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3xdy=$$

$$=3\int_0^1 [xy]_0^{\sqrt{1-x^2}}\,dx=3\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=\left|\begin{array}{c} 1-x^2=t \\ -2xdx=dt \\ xdx=-\frac{1}{2}dt \end{array}\right|=-\frac{3}{2}\int_1^0 \sqrt{t}\,dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\left[\sqrt{t^3}\right]_0^1=1.$$

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch